École Supérieure de Commerce 2009, filière économique

Exercice. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire « pile » est $p \in]0\,;1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n. Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $\mathscr{E}$ suivante : on lance n fois la pièce puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où « pile » a été obtenu. (Par exemple, si on a obtenu quatre « pile » au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne numéro 4.)

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles » obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   Donner l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

   b) En déduire la valeur de $E(X^2)$.

2. a) Calculer $P_{[X=0]}(Y=0)$ et $P_{[X=n]}(Y=0)$.

   b) Justifier que, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, $P_{[X=k]}(Y=1) = \dfrac{k}{n}$.

   c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $\big([X=k]\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$, que $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n}$.

   d) Donner alors la loi de Y et son espérance.

   e) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. a) Montrer que $E(XY) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k \cap Y=1) = \dfrac{E(X^2)}{n}$.

   b) En déduire la covariance du couple (X,Y).

Indications et remarques

1. a) Il faut passer le temps nécessaire à la compréhension du sujet (ne pas hésiter à traiter un cas particulier, à faire un dessin, un arbre, etc.) et parfois lire toutes les questions avant de se lancer. Ici c'est une situation très classique d'une loi usuelle à reconnaître absolument.

   b) Conséquence d'une formule du cours.

2. a) La réponse à ce genre de question de compréhension du sujet doit être particulièrement soignée (c'est une question de lecture, pas de mathématique).

   b) Idem.

   c) La formulation indique l'utilisation de la formule des probabilités totales (à citer et connaître parfaitement).

   d) Rappelons que déterminer une loi c'est donner les valeurs possibles et la probabilité de chacun d'elle.

   e) Application directe du cours.

3. a) Question plus difficile.

   b) Il faut commencer par donner la définition de la covariance (cours) puis utiliser les résultats précédents : une dernière question peut donc être très facile !

DS7 - Correction

Exercice 1 [ESC 2009]

1.a) On répète n fois ~~de~~ façon identique et indépendante la même expérience ayant deux issues « pile » de probabilité p et « face » de probabilité $1-p$. Comme X compte le nombre de « pile », on a $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$ (binomiale)

En particulier $\underline{X(\Omega) = [\![0;n]\!]}$ et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\underline{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.

De plus $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$

b) On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donc
$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1-p) + (np)^2 = \boxed{np(1-p+np)}$$

2.a) • Si $[X=0]$ est réalisé, on tire une boule dans l'urne numéro 0 qui ne contient que des boules rouges. Comme $[Y=0]$ est l'événement « obtenir une boule rouge », on a $\boxed{P_{[X=0]}(Y=0) = 1}$.

• De façon analogue, si $[X=n]$ est réalisé, on tire une boule dans l'urne numéro n qui ne contient que des boules vertes. On a ainsi $\boxed{P_{[X=n]}(Y=0) = 0}$.

b) Si $[X=k]$ est réalisé, on tire une boule dans l'urne numéro k qui contient k boules vertes (et n boules en tout). Comme $[Y=1]$ est l'événement « tirer une boule verte », on a $\boxed{P_{[X=k]}(Y=1) = \frac{k}{n}}$

c) D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(X=k)_{0 \leq k \leq n}$, on a
$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \cap Y=1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, P_{[X=k]}(Y=1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) \underset{\substack{\text{définition}\\ \text{de l'espérance}}}{=} \boxed{\frac{E(X)}{n}}$$

d) D'après la question précédente, on a $P(Y=1) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$.

Comme $Y(\Omega) = \{0;1\}$, on en déduit $P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = 1-p$.

Autrement dit, $\underline{Y \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p}$. On a $\boxed{E(Y) = p}$

e) D'une part $P(X=0 \cap Y=1) = 0$ (raisonnement analogue à celui de 2a)

et d'autre part $P(X=0)P(Y=1) = (1-p)^n \times p \neq 0$.

Ainsi $P(X=0 \cap Y=1) \neq P(X=0)P(Y=1)$ donc $\underline{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3.a) On a
$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x\, y\, P(X=x \cap Y=y)$$
$$\underset{Y(\Omega)=\{0;1\}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left[k \times 0 \times P(X=k \cap Y=0) + k \times 1 \times P(X=k \cap Y=1)\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)\, P_{[X=k]}(Y=1)$$
$$\underset{2b}{=} \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) \frac{k}{n}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k)$$
$$\underset{\substack{\text{théorème}\\ \text{de transfert}}}{=} \boxed{\frac{E(X^2)}{n}}$$

b) Par définition, $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

On $E(XY) = \frac{E(X^2)}{n}$ (3a), $E(X) = np$ (1a) et $E(Y) = p$ (2d).

$= p(1-p+np)$ (1b)

D'où $Cov(X,Y) = p(1-p+np) - np^2 = \boxed{p(1-p)}$